IDMC۲۰۰۹ - Paper ۱۴۳۱

استفاده از تئوری بازی درخطی سازی SVM ومقایسه آن با روشهای سنتی SVM

علیرضا نعیمی صدیق[۱]، ستار هاشمی[۲]،علی حمزه[۳]، اشکان سامی[۴]

چکیده

SVM یکی از الگوریتم های شناخته شده کلاس بندی مبتنی بر علم آمار می باشد که برای حل مسایل دو کلاسه ارایه شده است. با توجه به اینکه در محیط و داده های واقعی، مساله معمولا چند کلاسه (multiclass) می باشد، روشهای جداسازی چند کلاسه نسبت به باینری اهمیت بسزایی دارد. از روشهای مهم کلاسه بندی چند کلاسه به کمک کلاسه کننده های دودویی، می توان به One Against One و One Against All اشاره کرد که در صورت انتخاب هسته مناسب برای SVM و تنظیم پارامترهای مربوطه می توان به دقت بالایی دست یافت. این در حالی است که انتخاب هسته مناسب و تنظیم پارامترها مسئله کلاس بندی را غیر خطی می نماید که به نوبه خود می تواند باعث افت دقت مدل شود.

در این مقاله برای حل مشکل پیچیدگی مدل و افت دقت حاصل از آن از تئوری بازی استفاده می شود. تئوری بازی قادر خواهد بود مسئله غیرخطی مورد نظر ما را به یک مسئله خطی نگاشت نماید. تئوری بازی ارایه شده با استفاده از دو بازیکن (که در مسئله مورد نظر ما هر بازیکن معادل یک برچسب کلاس است)، ماتریس تصمیم بین آنها و حل معادلات حاصل به کمک برنامه ریزی خطی، احتمال داده در هر کلاس را محاسبه می نماید. نتایج آزمایشات موید این مطلب است که مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل های سنتی SVM دقت و سرعت قابل قبولی از خود نشان می دهد.

کلمات کلیدی

SVM، جداسازی چند کلاسه، تئوری بازی، برنامه ریزی خطی

A Game Theory Approach for Linearity Support Vector Machines and Comparison of Methods for Multi-Class

Alireza Naeimi Sadigh, Sattar Hashemi, Ali Hamze, Ashkan Sami

Abstract

Support Vector Machines (SVM) is a well known statistical classifier specially designed for binary classification. To do multi-class classification, SVM first decomposes a k-class problem into a set of binary problems, using One Against One or One Against All approaches, and then builds a classifier on each of them. Unfortunately however, these approaches incur considerable amount of complexity on system what in turn may cause a significant drop in accuracy as well.

This paper incorporates Game Theory into SVM learning algorithm to map the classification problem to a new linear space. Given the decision matrix and different players, the problem in the new space is solved using linear programming algorithms. This gives an estimate for each class, namely, the degree to which every instance belongs to each class. Our experimental results are promising; since they show that our approach improves accuracy on several real world data sets, meanwhile, decreasing running time.

Keywords

SVM, Multi-class Classification, Game Theory, Linear Programming

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد هوش مصنوعی دانشگاه شیراز - پست الکترونیکی anaeimi@gmail.com

۲ استادیار بخش کامپیوتر دانشگاه شیراز- پست الکترونیکی s_hashemi@shirazu.ac.ir

۳ استادیار بخش کامپیوتر دانشگاه شیراز- پست الکترونیکی ali@shirazu.ac.ir

۴ استادیار بخش کامپیوتر دانشگاه شیراز- پست الکترونیکی asami@ieee.org

۱- مقدمه

Support Vector Machine (SVM) یکی از الگوریتم های کلاسه بندی برای شناسایی الگو می باشد که بر مبنای تئوری آماری بنا شده است. ایده اصلی SVM استفاده از تابع هسته است، که با استفاده از چند جمله ای ها قابل حل می باشد. عمومی ترین طبقه بندی SVM ، حل مسأله دو کلاسه است که به برچسب های ۱- و ۱+ می انجامد .

غالباً در محیطهای واقعی طبقه بندی بر روی چند کلاس صورت می پذیرد که با توسعه SVM دو کلاسه، به چند کلاسه ها قابل حل می باشد. از روشهای متداول برای طبقه بندی SVM چند کلاسه می توان one against all و one against one را نام برد که هر کدام از این روشها مزایا ومعایبی دارند.

یکی از قدیمی ترین و ساده ترین پیاده سازی های SVM برای چند کلاسه ها، روش one against all می باشد که برای تعداد هر کلاس، M(تعداد کلاسها)کلاسیفایر در نظر گرفته می شود. کلاسیفایر اول، طبقه بندی کلاس اول را در مقابل بقیه کلاسها انجام می دهد. با ادامه همین روند، طبقه بندی سایر کلاسها صورت می گیرد. از روشهای دیگر طبقه بندی SVM می توان به طبقه بندی جفت کلاسی (pairwise)، one against one اشاره کرد که در مقایسه با سایر روشها از دقت بالاتری برخوردار است. در این روش برای M-Class، M(M-۱)/۲ طبقه بندی باینری SVM انجام می گیرد و ترکیب خروجی این طبقه بندی ها، برچسب کلاس را پیشگوئی می کند.

هدف از این مقاله، پرداختن به جزئیات روشهای فوق [۱] نیست، بلکه مقایسه روشهای مذکور با روش ارائه شده در این مقاله است.

طبقه بندی جفت کلاسی، یک مساله تصمیم گیری بین دو کلاس می باشد به همین دلیل ایده تئوری بازی [۲] در آن مطرح می شود و برچسب کلاس، با استفاده از احتمال بین کلاسها و ماتریس بازی (game) بین این دوکلاس پیشگوئی می گردد. سپس مسأله چند جمله ای SVM با هسته را تبدیل به یک مسأله خطی می نمائیم و آن را به کمک الگوریتم های برنامه ریزی خطی حل می کنیم. در این مقاله به اجمال، به بررسی بخش های زیر می پردازیم .

در بخش ۲، تئوری بازی و در بخش ۳، SVM باینری و سپس چندکلاسه ها را تشریح می نمائیم. در بخش٤ ایده بازی را با SVM مطرح نموده، فرموله می نماییم. سپس در بخش ۵ نتایج آزمایشات را بر روی چند مجموعه داده برای SVM چند کلاسه مطرح می کنیم. سرانجام در بخش ٦ به نتیجه گیری مقاله می پردازیم.

۲- تئوری بازی (Game Theory)

تئوری بازی حدود هشتاد سال پیش توسط یکی از نوابغ استثنایی علم ریاضیات به نام جان فُن نیومن پایه گذاری شد[۲]. او در سال ۱۹۲۸ قضیه کم و بیش[۵]را که اساس این تئوری جدید شد ارائه کرد و در سال ۱۹٤٤ در مقاله ای که با اقتصاددانی به نام اسکار مورگن استرن منتشر کرد، مفاهیم اولیه را بسط داد و کاربرد آن تئوری را در علم اقتصاد تشریح کرد. از آن پس تئوری بازی در علوم مختلف از جمله جامعه شناسی، روانشناسی، علوم سیاسی، علم تکامل وکامپیوتر مورد استفاده قرار گرفت.

می توان تئوری بازی را تئوری تصمیم گیری دانست. در یک بازی هر بازیکنی باید بر اساس قوانین بازی، بین چند تصمیم مختلف یکی را انتخاب کند و یا به عبارت دیگر به یک استراتژی دست یابد تا احتمال برنده شدن خود را زیاد کند. تئوری بازی مدلی را ارائه می دهد که بر طبق آن می توان استراتژی های مختلف را با یکدیگر مقایسه کرده و نتیجهٔ بازی راپیش بینی نمود.

حال به تعاریفی از تئوری بازی که در این مقاله استفاده می شود، می پردازیم .

۱.۲- ماتریس بازی

از متداول ترین انواع بازی ها در نظریه بازی، می توان به zero-sum و nonzero-sum [۲] اشاره کرد که نوع سود و زیان یک بازی را نشان می دهد. اگر برد یک بازیکن به باخت دیگری منجر شود و بالعکس (مثلا یک امتیاز مثبت برای برنده و یک امتیاز منفی برای بازنده) بازی از نوع zero-sum ودرغیراینصورت nonzero-sum می باشد. درطبقه بندی SVM باینری، نتیجه بصورت برچسب کلاس ۱+ و۱- مشخص می گردد، لذا از مدل zero-sum وفرمولهای مربوط به آن استفاده می شود[۲].

---

[۵] minmax

این روش را با سه تایی (S_1,S_2,A) بیان می نمایند که درآن S_1,S_2 مجموعه استراتژی های بازیکن اول و دوم و A تابعی است که بصورت $S_1 \times S_2 \rightarrow R$ تعریف می شود. در این تابع R مقداری صحیح است که عایدی بازیکن را در یک بازی نشان می دهد. این عایدی می تواند برای بازیکن اول، برد و برای بازیکن دوم، باخت محسوب شود (بعلت zero-sum) .

با استفاده از این تعریف بر روی مجموعه های S_1,S_2، ماتریس $[a_{ij}]$ ساخته می شود که عایدی استراتژی i ام برای بازیکن اول و استراتژی j ام برای بازیکن دوم را نشان می دهد. ماتریس فوق برای بازیکن برنده، به ماتریس برد(gain) و برای بازیکن بازنده، بـه مـاتریس باخـت (loss) معروف است. در zero-sum بازیکن اول به دنبال سود ماکزیمم و بازیکن دوم نیز به دنبال مینیمم ضرر خود می باشد.

جان نش، در سال ۱۹۵۰ نشان داد که بازیهای محدود همواره دارای یک نقطه تعادل است که در این نقطه همه بازیکنان با توجه به نقـش حریفان خود نقشه هایی را انتخاب میکنند که برای آنها بیشترین عایدی را به همراه دارد.

اگر

$$A(s^*{}_1, s_2) \geq A(s^*{}_1, s^*{}_2) \geq A(s_1, s^*{}_2), \forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \qquad (1)$$

استراتژی $s_1^* \in S_1$ و $s_2^* \in S_2$ به تعـادل نـش[6] [2] معـروف اسـت. بـه عبـارتی بـا انتخـاب اسـتراتژی $s^*{}_1$ توسـط بـازیکن اول، مقـدار $A(s^*{}_1, s_2)$ سود کمتر و با انتخاب استراتژی $s^*{}_2$ توسط بازیکن دوم، $A(s_1\ ,\ s^*{}_2)$ ضرر بیشتری را نشان می دهد.

به نقطه $(s^*{}_1, s^*{}_2)$ نقطه زینی[7] و $A(s^*{}_1, s^*{}_2)$ نیز مقدار بازی [2] گفته می شود.

۲.۲- اصل نقطه زینی در ماتریس بازی

در ماتریس بازی (S_1, S_2, A) یک نقطه زینی i و j وجود دارد اگر و فقط اگر $V_L = V_G = a_{ij}$

$$V_L = \underset{j}{Min}\ \underset{i}{Max}\, a_{ij}\ ,\ V_G = \underset{i}{Max}\ \underset{j}{Min}\ a_{ij} \qquad (2)$$

اگر چنین شرطی در یک بازی وجود داشته باشد، i امین استراتژی، بهترین عایدی را برای بازیکن اول و j امین استراتژی، بهترین عایدی را برای بازیکن دوم به ارمغان می آورد ودراین حالت مقداربازی نیز $a_{ij} = V_G = V_L$ می باشدواین ماتریس دارای یک استراتژی خالص[8]است. متأسفانه در بسیاری از بازی ها نقطه زینی وجود ندارد. در این مسائل بحث استراتژی ترکیبی[9] مطرح می گردد که بصورت زیر برای دو بازیکن بیان می شود.

۳.۲-استراتژی ترکیبی

این روش بر روی فضای احتمال استراتژی خالص تعریف می شود. برای ماتریس بازی (S_1, S_2, A) با ماتریس A (m×n)، مجموعه استراتژی ترکیبی Q برای بازیکن اول و P برای بازیکن دوم بصورت بردار احتمال زیر تعریف می گردد .

$$Q = \left\{ q = (q_1, ..., q_m)\, ;\ q_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{m} q_i = 1 \right\}$$
$$P = \left\{ p = (p_1, ..., p_n)\, ;\ p_j \geq 0\ ,\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\} \qquad (3)$$

که q_i احتمال اینکه بازیکن اول استراتژی خالص - i ام و p_j احتمال اینکه بازیکن دوم استراتژی خالص - j ام را انتخاب کند.

همانند نقطه زینی در استراتژی خالص، برای استراتژی ترکیبی داریم :

$$q^{*T} A p \geq q^{*T} A p^* \geq q^T A p^* \quad \begin{array}{l} q \in Q \\ p \in P \end{array} \qquad (4)$$

نقطه $(q^*, p^*) \in P \times Q$ را نقطه زینی در استراتژی ترکیبی می نامیم.

---

[6] Nash equilibrium
[7] Saddle point
[8] Pure-strategy
[9] Mixed-strategy

۱.۳.۲- اصل مهم در ماتریس بازی

تمام ماتریس های بازی یک راه حل استراتژی ترکیبی دارند، با توجه به این اصل برای ماتریس بازی A و مقدار بازی V در استراتژی ترکیبی، می توان مسأله زیر رابرای بازیکن اول، به روش برنامه ریزی خطی [۳] حل نمود.

$$Max\ V \ ,\ \text{اگر} \sum_i q_i = 1 \quad ، \quad \sum_i a_{ij}\, q_i \geq V \ ,\ q_i \geq 0 \qquad (۵)$$

به روش مشابه، برای بازیکن دوم نیزداریم:

$$Min\ V \ ,\ \text{اگر} \sum_i P_i = 1 \ ،\ \sum_i a_{ji}\, p_i \leq V \ ,\ P_i \geq 0 \qquad (۶)$$

۳– SVM جفت کلاسی (pairwise) برای چند کلاسه ها

فرض کنیم یک مجموعه داده train با n نمونه و داده $x_i \in X$ موجود باشد اگر x_i متعلق به کلاس ۱ یا ۲ باشد، y به ترتیب برچسب ۱+ و یا ۱- را اختیار می کند. ایده اصلی روش بر اساس هسته (kernel) [۴] می باشد که ورودیX توسط تابع $\varphi = X \longrightarrow H$ به فضا ی هیلبرت (H)، که یک فضا با بعد بالاست، نسبت داده می شود. این فضا معمولاً غیرخطی است و تابع φ به feature space معروف است. حال تابع هسته را بصورت زیر تعریف می نماییم [٤]:

$$K(x_i, x_j) = <\varphi(x_i)\ ,\ \varphi(x_j)> H \qquad (۷)$$

هدف SVM پیدا کردن ماکزیمم جدا کننده (w , b) در فضای feature کلاس ۱ و ۲ می باشد.

که بصورت زیر محاسبه می شود :

$$(\omega, b) : \rho_{(\omega\ ,\ b)}\ (x, y) = y\ (<\varphi(x), w>_H + b) / \|w\|_H \qquad (۸)$$

همچنین برای محاسبه تابع تصمیم در SVM ، از فرمول زیر استفاده می شود.

$$f(x) = < w, \varphi(x) >_H + b = \sum_{i \in SV_S} \alpha_1 . k\ (x_i, x) + b \qquad (۹)$$

اگر $f(x) > 0$ ، x متعلق به کلاس ۱ در غیر اینصورت متعلق به کلاس ۲ می باشد.

به کمک جفت کلاسه ها، می توان نشان داد که درSVM چند کلاسه $y_i = \{1\ ,\ ....\ ,\ M\}$ ، M(M-۱)/۲ طبقه بندی باینری وجود دارد.

در این مسأله، تابع تصمیم بصورت زیر محاسبه می شود:

$$f_{ij}(x) = < W_{ij}, \varphi(x) >_H + b_{ij} = \sum_{L \in SV\ S_{ij}} \alpha_{ij} . k(x_L, x) + b_{ij} \qquad (۱۰)$$

که درآن، f_{ij} تابع تصمیم بین کلاس i ام و کلاس j ام می باشد و اگر $f_{ij} > 0$ ، آنگاه x متعلق به کلاس i ام است. واضح است که $f_{ij} = -f_{ji}$

در ذیل به بررسی مهمترین روشهای SVM به کمک جفت کلاسی ها می پردازیم.

۱.۳- Crisp-pairwise SVM

برای حل crisp-pairwise یکی از ساده ترین روشها، major voting [۶] است. در این روش x متعلق به کلاسی است که بیشترین رأی را داشته باشد تابع رأی بصورت زیر تعریف می شود:

$$y = \arg\max_{i \in [1..M]} V_i(x) \ \text{ که }\ V_i(x) = \sum_{j \in [1..M]} Sgn\ F_{ij}(x) \qquad (۱۱)$$

که درآن f_{ij} از (۱۰) محاسبه می شود ، y برچسب کلاس و M تعداد کلاسها است.

از روشهای دیگر می توان به DAG [۵]، که بر مبنای گراف می باشد، اشاره کرد. در این روش، تعلق داده به یک کلاس مطرح می شود و تخمین به کلاسهای دیگرصورت نمی پذیرد.

در بسیاری از مسائل کلاسه بندی نمی توان بطور قطعی داده x را به یک کلاس نسبت داد بلکه باید احتمال کلاسها را بررسی نمود.

۲.۳- احتمال SVM جفت کلاسه

در این روش احتمال داده x به M کلاس، بصورت زیر محاسبه می شود :

$$\{P_i\}_{i=1}^{M} \text{ وقتی که و } P_i = P(y=i \mid x) \quad and \quad \sum_{i=1}^{M} P_i = 1 \qquad (۱۲)$$

البته برای محاسبه احتمال کلاسها، قیدهایی نیز وجود دارد [۶] .

روشهای voting وmarkov chain محاسبات بالا و پیچیدگی فراوانی دارند، به همین علت معمولا از روش Sigmoid [۶] استفاده می شود.

٤- کلاسه بندی جفت کلاسه ها با ماتریس بازی

می دانیم در مسئله کلاسه بندی داده های M کلاسه با استفاده از SVM با رویکرد جفت کلاس، داده x باید به کمک تابع تصمیم (۱۰) در M(M-۱)/۲ طبقه بندی شرکت نماید و با ترکیب این طبقه بندی ها یک خروجی مناسب پیشگوئی شود، این اصل جفت کلاسی ها به کمک تئوری بازی و ماتریس بازی صورت می پذیرد .

برای این منظور، تابع C را بصورت $C:(X*Y*Y) \to [0\,,+\infty]$ تعریف می کنیم وآنرا تابع زیان [۲] می نامیم. همواره داریم $C(x,y,f(x)) \ge 0$. (که در آن x یک الگو داده ای، y برچسب واقعی کلاس داده و $f(x)$ یک پیشگوئی برچسب کلاس می باشد.)

نامساوی فوق، نشان می دهد که برای یک پیشگوئی درست، عایدی مثبتی داده نمی شود. همچنین داریم $C(x,y,y)=0$.

در SVM ، C بصورت زیر محاسبه می شود :

$$C(x,y,f(x)) = Max\,(0\,,1-y\ f(x)) \qquad (۱۳)$$

در SVM ، ماتریس زیان[۱۰] را که یک ماتریس مربعی M×M است بصورت زیر تعریف می نماییم :

$$C_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & i=j \\ C(x,1,f_{ij}(x)), & i \ne j \end{cases} \qquad (۱۴)$$

که f_{ij} تابع تصمیم و با فرمول (۱۰) قابل محاسبه است.

در این ایده به دنبال استراتژی بهینه ای هستیم که داده x به کلاسه y نسبت داده شود و تابع زیان تا حد امکان مینیمم شود .

به کمک تابع تصمیم (۱۰)، ماتریس زیان (۱۴) وسپس نقاط زینی برای استراتژی خالص و یا ترکیبی را بدست می آوریم.

طبق اصل ۱.۳.۲ ، ماتریس زیان دارای یک راه حل در استراتژی ترکیبی و یک نقطه زینی است. بنابراین در استراتژی ترکیبی یک فضای احتمال بر روی استراتژی خالص وجود دارد تا ماتریس زیان را می نیمم کند.

در مسأله SVM جفت کلاسه به کمک ماتریس بازی، استراتژی خالص داده x به کلاس i ام نسبت داده می شود و در استراتژی ترکیبی داده x متعلق به کلاس i ام با احتمال P_i است. حال برای پیشگویی بر چسپ کلاس داده x، بزرگترین احتمال کلاس ها را می یابیم :

$$y = \arg Max\ P_i(x) \text{ وقتیکه } P_i(x) = P(y=i \mid x)) \qquad (۱۵)$$

سپس در استراتژی ترکیبی و به کمک برنامه ریزی خطی، احتمال کلاسها را محاسبه می نماییم :

$$\min V \ , \text{ به شرطی } \sum_{i=1}^{M} P_i = 1 \ , \ \sum_{i} C_{ji}\ P_i \le V \ , \ P_j \ge 0 \qquad (۱۶)$$

حل مسأله فوق به کمک الگوریتم Simplex [۳] در برنامه ریزی خطی صورت می پذیرد که از آن $\{P_i\}_{i=1}^{M}$ محاسبه می شود و بزرگترین P_i، بر چسب کلاس x را نشان می دهد. بنابراین مسأله SVM چند کلاسه به کمک تئوری بازی به یک مسأله خطی تبدیل می گردد و به همین علت این روش را Linear Programming-Pairwise SVM (LP-PSVM) می نامیم.

٥- آزمایشات

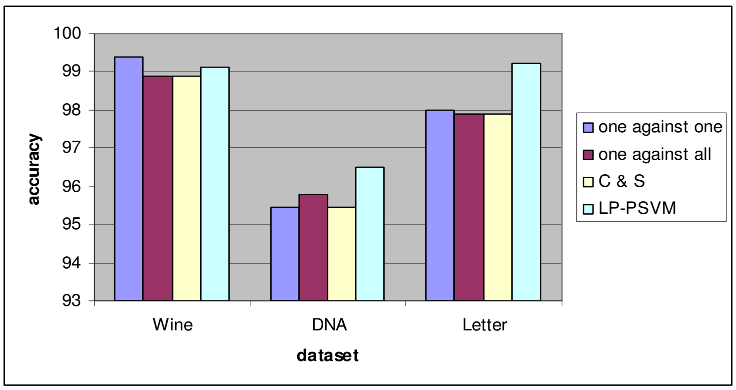
در این بخش نتایج حاصل از آزمایشات که بر روی چندین مسأله طبقه بندی چند کلاسه صورت پذیرفته است، را با روش LP – SVM و روشهای SVM جفت کلاسه مانند OvO[۱۱] و OvA[۱۲] مقایسه خواهیم کرد داده هایی که این مسائل را بر روی آن آزمایش کرده ایم از

---

[۱۰] loss
[۱۱] One versus One
[۱۲] One versus All

مجموعه داده های UCI [۷] و Statlog [۸] می باشند.
اولین مجموعه داده مورد بررسی Wine است که در مجموعه داده های UCI [۷] معرفی شده است. Wine، ۲ کلاسه و دارای ۱۷۸ نمونه می باشد که ۷۰% داده ها را آموزش داده و از مابقی داده ها بعنوان تست استفاده می نماید. مجموعه بعدی DNA است که از مجموعه داده های Statlog [۸] و سه کلاسه می باشد. DNA دارای ۱٤۰۰ نمونه برای آموزش و ۱۱۸۷ نمونه برای تست است. مجموعه داده بعدی Letter، که در مجموعه داده Statlog معرفی شده است، دارای ۲۶ کلاس، ۱۰۵۰۰ نمونه برای آموزش و ۵۰۰۰ نمونه برای تست می باشد.
برای هر سه مجموعه داده فوق از پوسته RBF استفاده می کنیم. مقدار پارامترهای C و γ به ترتیب برای Wine ، ۲۲۸ و ۹۷×۱۰^{-۵} و برای DNA ، ۸ و ۱۵×۱۰^{-۳} و برای Letter نیز ۱۶ و ۴ می باشد. نتایج آزمایشات برای روش های OvO و OvA در [۱] آورده شده است.
با روش LP-PSVM معرفی شده در این مقاله به نتایج قابل قبولی در مقایسه با روشهای دیگر دست یافته ایم که در نمودار (۱) آمده است. نکته قابل توجه این است، که در این روش بعلت خطی وغیر پارامتریک بودن الگوریتم، مرتبه زمانی برخلاف روشهای دیگر از مرتبه اول می باشد. همچنین به دلیل اینکه این الگوریتم دریک مرحله اجرا می شود، این روش نسبت به سایرروشهای غیرخطی سرعت بیشتری دارد.

نمودار (۱) دقت طبقه بندی



۶- نتیجه گیری

در این مقاله استفاده از نظریه تئوری بازی در کلاس بندی مسایل چند کلاسه با استفاده از SVM مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. یک مساله M کلاسه، ابتدا به M(M-۱)/۲ مسئله دو کلاسه تبدیل می شود و سپس خروجی این کلاسه بندی ها منجر به تخمین یا پیشگوئی برچسب کلاس نهایی می گردد. هر کدام از کلاسه کننده های SVM با استفاده از تئوری بازی ابتدا مساله غیر خطی را به یک مسئله خطی تبدیل می نمایند و سپس با استفاده از برنامه ریزی خطی معادلات حاصل را حل می کنند. نتایج آزمایشات انجام شده برروی مجموعه داده ها UCI و Statlog قابلیت روش ارایه شده را در مقایسه با سایر روش ها هم از نقطه نظر دقت و هم کارایی نشان می دهد.
برای آینده کار در نظر داریم از روشهای دیگر حل برنامه ریزی خطی به غیراز سیمپلکس [۳] برای بدست آوردن سرعت بالاتر استفاده نماییم.

۷- مراجع

[۱] Chih-Wei;Chih-Jen Lin;" A Comparison of Methods for Multiclass Support Vector Machines", IEEE Transaction on Neural Networks,Vol. ۱۳ ,No. ۲,March ۲۰۰۲
[۲] G.Owen ;*Game Theory,* Academic Press,۱۹۸۲.
[۳] Bazaraa Mokhtar; Jaivis ;*Linear Programming and Network Flows,* Wiley and Sons Inc,۱۹۷۷.
[۴] V. Vapanik;*Satistical Learning Theory* ,Wiley,۱۹۹۸
[۵] N.Cristianini;"Large margin DAG's for multiclass classification " ,MIT press,۲۰۰۰,vol. ۱۲, pp. ۵۴۷-۵۵۳. J.C.Platt
[۶] T.-F. Wu ;C._j. Lin ;R.-C. Weng;"Probabilty Estimates for Multiclass Classification by Pairwise Coupling",Journal of Machine Learning Research ٥ (۲۰۰٤) ۹۷٥-۱۰۰٥
[۷] C.L Blake;C.J Merz "UCI Respository of machine Learning dataset",Technical report, University of California, Irvine,CA,۱۹۹۸.http://www.ics.uci.edu/~mlearn/MLRespository.html
[۸] ftp://ftp.ncc.up.pt/pub/statlog